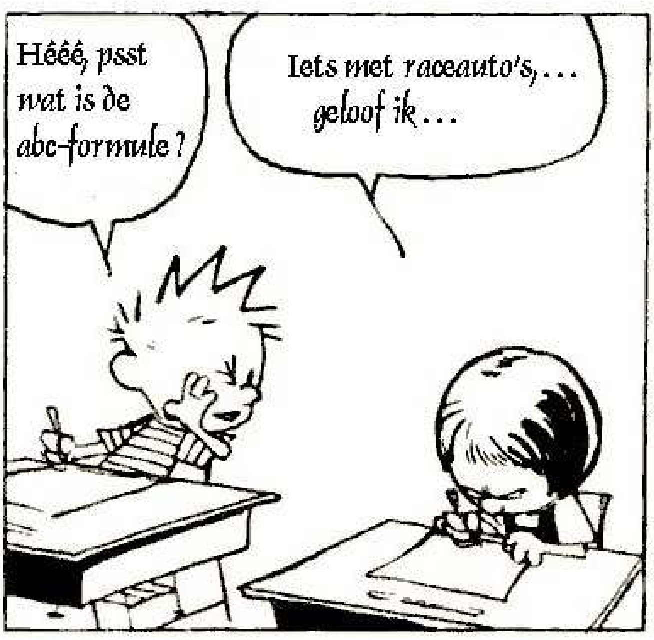
Het oplossen van kwadratische vergelijkingen met de abc-formule



door

Pierre van Arkel

Dit verslag is een voorbeeld hoe bij wiskunde een verslag er uit moet zien.

Elk schriftelijk verslag heeft een titelblad. Zet je eigen naam ook op het titelblad.

Inhoudsopgave

In plaats van een nabeschouwing, kun je ook een conclusie of een samenvatting opnemen

De inleiding, nabeschouwing (of een conclusie of een samenvatting), bronvermelding en de bijlagen moeten altijd aanwezig zijn.

Nummer de bladzijden, dat is erg handig.

Inleiding

Op een kleitablet, zo'n 2000 jaar oud, uit de Babylonische tijd, staat de onderstaande opgave:

"Ik heb het oppervlak van twee vierkanten gesommeerd, het is (16,40). De zijde van het ene is $\frac{2}{3}$ van de zijde van de andere. Ik heb 10 van de zijde van het kleine vierkant afgetrokken. Wat zijn de zijden van het vierkant?"

In deze opgave is (16,40) een uitdrukking in het zestigtalligstelsel, dat in die tijd gebruikelijk was. In plaats van (16,40) schrijven wij $16 \times 60 + 40 = 1000$.
Als je de zijde van het ene vierkant x en de zijde van het andere vierkant y noemt, dan staat er in de tekst $x^2 + y^2 = 1000$ en $y = \frac{2}{3}x - 10$.

In die tijd kon men al de oplossingen $x = 30$ en $y = 10$ vinden.

In onze tijd maken we van $x^2 + y^2 = 1000$ en $y = \frac{2}{3}x - 10$ één nieuwe vergelijking:
$x^2 + (\frac{2}{3}x - 10)^2 = 1000$
Haakjes wegwerken en op nul herleiden, levert: $\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0$

In de tijd van koning Hammurabi (ongeveer 1950 voor Chr.) wist men hoe je dit soort problemen kon oplossen.

Tegenwoordig gebruiken we vaak de abc-formule om dit soort vergelijkingen op te lossen. In de volgende hoofdstukken wordt uitgelegd hoe dat gaat.
Dit soort vergelijkingen zijn echter niet altijd oplosbaar. Hoe dat komt, wordt in een apart hoofdstukje uitgelegd.

In de inleiding vertel je waar je onderwerp of onderzoek over gaat.
Een onderzoeksvraag, een vraagstelling of een hypothese worden natuurlijk ook in de inleiding genoemd.
Probeer je lezers nieuwsgierig te maken.

Formules kun je in WORD maken met Mathtype of met de vergelijkingseditor:
Invoegen, object, naar keuze Mathtype of Microsoft vergelijkingen.
Grafieken kun je in WORD maken met behulp van VU-grafiek of EXCEL

Wat is een kwadratische vergelijking?

Eerstegraads vergelijkingen
Wiskundige problemen worden vaak herleid tot het oplossen van vergelijkingen. Daarom is het oplossen van vergelijkingen erg belangrijk. Sommige vergelijkingen zijn erg eenvoudig op te lossen.
Zo is het oplossen van vergelijking $2x+8=30$ betrekkelijk gemakkelijk. De oplossing is $x=11$.
Een vergelijking zoals $2x+8=30$, noemen we een eerstegraads vergelijking, omdat deze vergelijking er eentje is van de gedaante $ax+b=0$, namelijk met $a=2$ en $b=30-8=22$.

Tweedegraads vergelijkingen
Als er in plaats de hoogste macht van x een x^2 is, dan noemen we de vergelijking tweedegraads.
Tweedegraads vergelijkingen worden ook wel kwadratische vergelijkingen genoemd.
Voorbeelden van kwadratische vergelijkingen zijn:
$3x^2-5x=11$
$2x^2=72$
$-3x+4x^2-52=0$

Als je in deze vergelijkingen op nul herleidt, dus eerst de x^2, daarna de x en tenslotte de constante schrijft, dan krijg je de algemene gedaante van een kwadratische vergelijking is: $ax^2+bx+c=0$

Na de inleiding komt het eigenlijke verhaal. Dat verhaal bestaat vaak uit verschillende onderdelen. Je kunt van die onderdelen aparte hoofdstukjes maken, zoals in dit verslag is gedaan.

De opgaven die je bij deze praktische opdracht moest maken, mag je in je logboek opnemen. Die hoef je dus niet over te typen. Al het kladpapier komt ook in het logboek! In het logboek moet ook duidelijk te zien zijn, wie wat gedaan heeft en hoeveel tijd daar voor nodig was.

Als je een onderzoek moet doen, dan staat hier ook het verslag van je onderzoek.

Sla geregeld één of meer regels over; zorg voor alinea's. Gebruik zo nu en dan een tussen kopje. Maak er een overzichtelijk geheel van.

Hoe los je een kwadratisch vergelijking op?

Als je elke kwadratische vergelijking kan schrijven als $ax^2 + bx + c = 0$, dan zijn sommige van deze vergelijkingen erg gemakkelijk op te lossen. Vooral als de b of de c nul zijn. Ik geef een paar voorbeelden:

Eerst het geval dat b=0.

$4x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

$-5x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow -5x^2 = -20 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

$3x^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -18 \Leftrightarrow x^2 = -6$ (geen oplossingen)

Nu het geval dat c=0.

$4x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x(4x - 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4x - 12 = 0$

dus $x = 0 \vee x = 3$

Nu het geval dat a=0.

Als a=0, dan is het geen kwadratische vergelijking.

De abc-formule.

Als a, b en c allemaal niet nul zijn, dan kun je de oplossingen vinden door gebruik te maken van de abc-formule.

De abc-formule is: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Voorbeeld: stel je wilt de vergelijking, die in de inleiding genoemd wordt, $\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0$ oplossen.

In dat geval is: $a = \frac{13}{9}$, $b = -\frac{40}{3}$ en $c = -900$.

Invullen in de formule:

$$x = \frac{\frac{40}{3} \pm \sqrt{(-\frac{40}{3})^2 - 4 \cdot \frac{13}{9} \cdot (-900)}}{2 \cdot \frac{13}{9}} = \frac{\frac{40}{3} \pm \sqrt{(-\frac{40}{3})^2 - 4 \cdot \frac{13}{9} \cdot (-900)}}{\frac{26}{9}} = \frac{\frac{40}{3} \pm \frac{220}{3}}{\frac{26}{9}} = \frac{120 \pm 660}{26}$$

De ene oplossing is $x = \dfrac{120 + 660}{26} = 30$, de andere oplossing is $x = \dfrac{120 - 660}{26} = -\frac{270}{26} \approx -10{,}38$

Met de laatste oplossing zouden de Babyloniërs geen raad weten; ze kenden het gebruik van negatieve getallen niet.

Opmerking:

De abc-formule kun je ook gebruiken bij eenvoudige kwadratische vergelijkingen. In zulke gevallen is de b of de c gelijk aan nul.

Het bewijs van abc-formule?

Het bewijs:

$ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx = -c$

alles keer 4a

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

bij beide kanten b^2 toevoegen

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

het linker stuk is een kwadraat

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

worteltrekken

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

beide kanten delen door 2a

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De rol van de discriminant

In de abc-formule $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$, staat onder het wortelteken $b^2 - 4ac$.

De uitdrukking $b^2 - 4ac$ noemen we de discriminant van de kwadratische vergelijking.
Discriminant komt van discrimineren, dat betekent "onderscheid maken".

De discriminant is groter dan nul.
Als de discriminant groter is dan nul,
dan bestaat de wortel en dan heeft $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ twee verschillende oplossingen.
Voorbeeld: $3x^2 - 6x - 9 = 0$.
In dit voorbeeld is: $a = 3$, $b = -6$ en $c = -9$; de discriminant is $(-6)^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 144$
De oplossingen zijn $x = -1$ en $x = 3$.

De discriminant is nul.
Als de discriminant gelijk is aan nul,
dan is de wortel nul en heeft $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ twee dezelfde oplossingen.
We zeggen dan dat er één oplossing is.
Voorbeeld: $x^2 - 6x + 9 = 0$.
In dit voorbeeld is: $a = 1$, $b = -6$ en $c = 9$; de discriminant is $(-6)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 0$
De enige oplossing is $x = 3$.

De discriminant is kleiner dan nul.
Als de discriminant kleiner is dan nul,
dan bestaat de wortel niet en dan heeft $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$ geen oplossingen.
Voorbeeld: $x^2 - 4x + 9 = 0$.
In dit voorbeeld is: $a = 1$, $b = -4$ en $c = 9$; de discriminant is $(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = -20$
Er zijn geen oplossingen.

Nabeschouwing

In deze praktische opdracht heb ik geleerd dat je bij elke kwadratische vergelijking met de abc-formule kunt werken. Als de discriminant niet negatief is, kun je oplossingen van de vergelijking vinden. In de TI-83 heb ik een programmaatje gemaakt, dat gebruik maakt van die formule. Op die manier kun je snel de oplossingen berekenen van kwadratische vergelijkingen.

Laat zien in een nabeschouwing wat je geleerd/ontdekt hebt. *In een samenvatting komt alles nog eens heel kort aan de orde.* *In een conclusie vertel je in het kort wat je allemaal ontdekt hebt.*

Bronvermelding

Geschiedenis van de wiskunde (hoofdstuk 1), D.J. Struik
Moderne wiskunde deel 3a VWO, Dijkstra e.a.
A history of Mathematics (chapter 2), Carl. B. Boyer
Internet http://home.planet.nl/~philip.van.egmond/school/vwo3/kwa/kwa-01.htm

Noem ook de internetsites met complete adressen

Bijlagen

Ik heb het logboek als bijlage toegevoegd. In het logboek kunt u zien dat ik ongeveer 9 uur nodig heb gehad om deze opdracht te maken. Bovendien staan in het logboek alle uitwerkingen van de sommen die ik gemaakt heb.

Aan het logboek moet je docent kunnen zien wat je allemaal gedaan hebt, en hoeveel tijd je er in gestopt hebt. Daarom moet het logboek alles bevatten wat je gedaan hebt, alle uitwerkingen van opgaven en ook je kladpapier.